

*П.Д.ДОЦЕНКО*, докт.техн.наук, НАУ «ХАИ»

## **ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

Викладені результати розробок оригінальної методики, алгоритмів і програм розрахунку статичного та динамічного стану комбінованих оболонкових конструкцій. Наведено ряд прикладів використання цієї методики. Чисельний процес розрахунку порівняно з відомими має суттєво підвищену точність та швидкість, надійність, низькі апаратні потреби, не потребує високого професіоналізму для передпроцесорної підготовки задач, але тим не менше, має досить широкі масштаби використання. Математичною моделлю є нелінійні диференціальні рівняння динаміки оболонок обертання. На цій основі сформульовані рівняння розрахунку статичного та динамічного незбуреного стану та рівняння в збуреннях для розрахунку задач малих коливань, стійкості та несучої спроможності. В основі чисельних алгоритмів закладені відносно прості рекурентні процеси та ряд спеціально розроблених модулів, які й забезпечують вказані вище показники.

A peculiar method for computing static and dynamic state of combined shell structures is discussed, as well as the relevant algorithms and some specific examples. The proposed digital procedure, as compared to the known ones, is of the enhanced accuracy and processing speed, higher reliability and lower hardware requirements. It does not demand high professionalism from a user in preprocessing phase, and nevertheless, is of a rather broad applicability. The non-linear differential equations of dynamics of shell of revolution were the mathematic model and the basis to formulate the equations for calculating the unperturbed static and dynamic state, as well as the equations in disturbances for computing the problems of small-amplitude oscillation, stability and bearing capacity. The numerical algorithm is based on relatively simple recurrent processes and on a number of specially created program units, that ensure the features noted above.

**1. Введение.** Процесс исследования статического и динамического напряженного состояния оболочек вращения обладает некоторым внутренним свойством – плохой обусловленности краевой задачи, спровоцированной наличием быстро возрастающих и, соответственно, быстро убывающих решений, которые с увеличением длины образующей приводят к полному искажению результатов. Эта проблема привела к поиску алгоритмов, позволяющих хотя бы частично выйти из указанных затруднений. В этом направлении использовались: приемы разбиения оболочки на относительно короткие элементы со стыковкой решений по вектору состояния, различные модификации методов начальных параметров и метода Галеркина. Были разработаны различные варианты метода прогонки (Абрамов А.А., Бабушка И., Бидерман В.Л., Свирский И.В., Черника В.С. и др.).

Существенного продвижения в этом направлении удалось достичь использованием метода ортогонализации С.К. Годунова [1] в соединении с методом начальных параметров и методами прогонки. Впервые в задачах статки оболочек вращения метод ортогонализации был применен с сотрудниками Я.М. Григоренко [2]. В дальнейшем этот подход нашел достаточно широкое развитие на территории бывшего СССР в работах многих авторов. Достаточ-

но полное освещение методик и алгоритмов этого варианта принадлежит группе авторов (Григорьев И.В., Кармишин А.В., Ясковец В.А., Мяченков В.И., Пахомова Л.А., Репин А.А., Фролов А.В. и др., см. [3,4]).

Однако при всех своих достоинствах и возможностях такой подход тоже не лишен ограничений и недостатков. Во-первых, численные алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений вносят заметное накопление погрешностей, возрастающих с ростом длины образующей, см. [3, стр.86]. Существенные погрешности дает и метод ортогонализации, прежде всего при вычислении и использовании прямых и обратных матриц ортогонализации, см. [5, стр. 467]. Во-вторых, применение метода ортогонализации ограничено сравнительно малым числом узлов разбиения, поэтому он мало приспособлен к расчету комбинированных конструкций. И, наконец, применение численных процессов с использованием метода С.К. Годунова позволяет получать результаты только в узлах ортогонализации и не дает возможности построить, например, поля напряжений, перемещений и т. д. в промежуточных точках. Разработанные в этом направлении средства достаточно искусственны и имеют ограниченные возможности.

Для повышения точности расчетов предлагались различные приемы, среди которых: масштабирование уравнений с целью выравнивания порядков их коэффициентов (Бидерман В.Л.); модификация методов прогонки, ортогонализации и процедурных алгоритмов (Бабушка И., Беллман Р., Мяченков В.И., Григолюк Э.И., Григоренко Я.М., Василенко А.Т. и др.). Тем не менее, разработка алгоритмов и программ расчета каждой конкретной задачи оставалась практически индивидуальной и требовала высокой профессиональной подготовки пользователя, что затрудняло общедоступное его применение.

**2. О методе рекуррентных соотношений.** Для расчета статического и динамического состояния пространственно криволинейных, разветвленных стержневых и трубопроводных систем, как один из вариантов модификации метода начальных параметров, автор настоящей работы в течении многих лет использовал алгоритм рекуррентного построения матриц фундаментальных решений, или иначе, матриц перехода между элементами конструкций (см., например [6,7]). В последние годы такой подход нашел развитие в применении к расчету статики и динамики оболочечных систем [8, 9] под названием – «метод рекуррентных соотношений».

**2.1. Математические модели.** В условиях гипотез Кирхгофа-Лява, с поправками Балабуха и Новожилова, сформулированы нелинейные (с сохранением второго порядка) уравнения динамики оболочек вращения. Известными способами [3,5,10], после соответствующих тождественных преобразований к специальному виду и использования условия периодичности решения по угловой координате параллели  $\varphi$ , они разрешены относительно первых производных по координате меридиана  $s$ . Такая формулировка математической модели реализуется далее при исследовании линейных и нелинейных задач рас-

чета статического и динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) составных и комбинированных оболочечных конструкций.

На основе нелинейной модели сформулированы уравнения в возмущениях (линеаризованные по параметрам возмущений). Они учитывают в общем случае многокомпонентное предварительное НДС, индуцированное невозмущенным состоянием. Модель такого вида является базовой при исследовании задач малых колебаний, статической и динамической устойчивости, несущей способности оболочечных конструкций, в том числе и комбинированных.

**2.2. Основные соотношения МРС.** Система уравнений в частных производных моментной теории оболочек вращения, после исключения  $\varphi$ , имеет восьмой порядок (шестнадцатый – при учете кососимметричных деформаций) (см. [5,8,10]). В векторно-матричном виде система уравнений и представление ее решения имеют вид:

$$\frac{d\bar{z}}{ds} = A\bar{z} + \bar{q}; \quad \bar{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k s^k \equiv \bar{z}_0 + \bar{z}_1 s + \bar{z}_2 s^2 + \bar{z}_3 s^3 + \dots, \quad (2.1)$$

где  $\bar{z}_k$ , ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) – постоянные вектора, подлежащие определению.

В общем случае (криволинейный меридиан, переменные нагрузки и т.п.) элементы матрицы  $A$  и компоненты вектора нагрузок  $\bar{q}$  являются функциями дуговой координаты  $s$ . Предполагается, что они разложены в степенные ряды (в окрестности  $s = 0$ ) вида:  $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s^k$ ;  $\bar{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k s^k$ , где  $A_k$  и  $\bar{q}_k$  постоянные, соответственно, матрицы и вектора.

Для однородного уравнения (2.1), в соответствии с видом решения указанного там же, следует принять  $\bar{z}|_{s=0} = \bar{z}_0$  (что эквивалентно  $k = 0$ ). С другой стороны, поскольку все постоянные  $\bar{z}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  должны представлять собой линейную комбинацию компонент вектора  $\bar{z}_0$ , то  $\bar{z}_k = C_k \cdot \bar{z}_0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , где  $C_k$  – постоянные матрицы с неизвестными элементами, а  $C_0 = E$  (единичная матрица). В связи с этим, общий вид решения однородного уравнения (2.1) можно представить в виде:

$$\bar{z} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot s^k \right) \bar{z}_0 \equiv H \cdot \bar{z}_0; \quad H = E + C_1 s + C_2 s^2 + \dots \quad (2.2)$$

Построение решения однородного уравнения сводится по существу к расчету матриц  $C_k$ . Частное решение неоднородного уравнения по определению  $\bar{z}_k$  строится аналогично при наличии  $\bar{q}$ . После подстановок и соответствующих преобразований, получим рекуррентные соотношения для определения матриц  $C_k$  в общем решении однородной задачи и коэффициентов  $\bar{z}_k$  частного решения неоднородного уравнения:

$$C_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k A_j C_{k-j}; \quad \bar{z}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k A_j \bar{z}_{k-j} + \bar{q}_k; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (2.3)$$

При этом следует учесть, что  $C_0 = E$ , а во втором выражении  $\bar{z}_0 = 0$ .

Как показала практика применение метода рекуррентных соотношений, точность расчета в целом по конструкции обусловлена порядком максимальных элементов матрицы  $H$  в решении однородного уравнения. Поэтому дальнейшее внимание будет сосредоточено в основном на проблемах касающихся однородного решения.

**2.3. Оптимальное разбиение на СуЭ.** Каждая оболочка, входящая в состав комбинированной конструкции, в процессе предпроцессорной подготовки, при необходимости, разбивается по меридиану на относительно длинные элементы – суперэлементы (СуЭ). Какие-либо обоснованные критерии этого разбиения (кроме некоторых рекомендаций, например, [5, стр. 145; 3, стр. 67]) в литературе отсутствуют. Мы используем подход, автоматически адаптирующийся к конкретным параметрам соответствующего элемента конструкции и уже в предпроцессорном прогоне, информирующем о желательном коэффициенте деления и оптимальной длине рабочего СуЭ каждой детали.

Суть его в следующем. В предпроцессорном прогоне рекуррентным путем строится матрица  $H$ , связывающая выражением  $\bar{z}_K = H\bar{z}_N$  вектор состояния начала ( $N$ ) и конца ( $K$ ) элемента конструкции, с образующей известной длины ( $L_0$ ). По ходу его выполнения контролируется максимальный элемент матрицы  $H$ , порядок которого и определяет точность расчета<sup>1</sup>. Этот элемент, при заданной длине участка  $s = L_0$  и заданной точности аппроксимации решения степенным рядом, должен быть по порядку заметно ниже, чем количество знаков мантиссы для выбранного типа переменных. Базовый порядок “заметно ниже” составляет (для типа **extended**) примерно  $10^7 + 10^8$ . В этом случае мы можем быть уверенными, что и малые слагаемые с отрицательным порядком не ниже этого будут тоже учтены. На этом основании делается оценка коэффициента деления  $L_0$  на СуЭ и оценка оптимальной длины этого СуЭ.

**2.4. Разрешающая система уравнений.** Для отражения произвольных распределенных параметров (в частности, распределенных нагрузок) размерность вектора состояния увеличена до 9 (последний, девятый элемент равен единице) и, соответственно, увеличена размерность матрицы  $H$ . Девятая строка нулевая, кроме девятого элемента – равного единице. В девятом столбце (в 5, 6 и 7 строках) размещены результаты учета, в общем, переменных распределенных нагрузок, которые формируются тем же рекуррентным процессом.

Разделим, если необходимо, каждый составной элемент общей конструкции оптимальным образом на СуЭ, считая, что отсчет  $s$  на каждом СуЭ начинается с нуля. Пусть таких СуЭ будет  $ks$ . Тогда, для каждого из них выполняется равенство  $\bar{z}_{n+1} = H_{n+1}\bar{z}_n$ , где  $n=0,1,2,\dots,ks-1$ . Соответствующие вектора состояния  $\bar{z}_n$  ( $n=0,1,2,\dots,ks$ ) считаются неизвестными и подлежат определению.

<sup>1</sup> Поскольку матрица  $H(s)$  безразмерная, то, очевидно, что масштабирование вектора состояния или приведение системы уравнений к безразмерному виду не может повысить точность расчетов.

Система равенств  $\bar{z}_{n+1} = H_{n+1} \bar{z}_n$  представляет собой, с одной стороны, тоже рекуррентную последовательность и, в принципе, может быть использована в этом режиме. Такой вариант может быть достаточным в отдельных задачах колебаний и устойчивости конструкций (см. [6,7]), при условии, что информация о формах колебаний нас не интересует. В задачах расчета НДС, при наличии краевых эффектов и относительно большого количества СуЭ, за счет накопления погрешностей при перемножении матриц  $H_n$ , такой вариант нежелателен. С другой стороны, использование рекуррентного процесса в таком варианте нежелательно и по причинам, речь о которых пойдет несколько ниже. Тем не менее, эта цепочка рекуррентных соотношений в интерпретации **системы независимых уравнений** и представляет собой разрешающую систему. Учитывая ее диагональность, имеем:

$$\begin{aligned} H_1 \bar{z}_0 - \bar{z}_1 &= 0; \\ H_2 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= 0; \\ H_3 \bar{z}_2 - \bar{z}_3 &= 0; \\ &\dots \\ H_{ks} \bar{z}_{ks-1} - \bar{z}_{ks} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

По поводу формирования этой системы сделаем несколько замечаний:

– Соответствующие матрицы  $H_n$ , вычисляются и записываются в (2.4) в порядке последовательного прогона по всем СуЭ. При формировании разрешающей системы ЛН определяется автоматически в предпроцессорном прогоне по назначенному количеству СуЭ при оптимальном разбиении. Матрица коэффициентов в разрешающей системе является ленточной (кроме последнего столбца) с шириной ленты равной 8, независимо от формы элементов конструкции, вида нагрузок и вида особенностей (повороты базиса, жесткие, упругие или упругодемпфирующие опоры, шпангоуты и т.п.)

Таким образом, в задачах расчета статического или динамического НДС, разрешающая система представляет собой полную неоднородную систему  $LN \cdot (LN + 1)$  алгебраических уравнений и постоянными вещественными коэффициентами. Компоненты векторов  $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{ks}$  известны и подлежат расчету, кроме, обычно заданных граничными условиями четырех компонент в  $\bar{z}_0$ , и, соответственно, в  $\bar{z}_{ks}$ , что и обеспечивает полноту системы. Учет промежуточных предельных условий решается в процессе формирования разрешающей системы специальной микропрограммой, не изменяющей общий процесс, но добавляющий лишние неизвестные и, соответственно, дополнительные уравнения.

В задачах малых колебаний, устойчивости и несущей способности соответствующая система уравнений является однородной, того же порядка, но с комплексными коэффициентами. Для поиска комплексных собственных значений и собственных форм автором была ранее разработана надежная специальная программа [6,7,11].

**2.5. Матрица  $H_k^*$ . Интегрирование системы.** Разрешающая система уравнений (2.4) с матрицами  $SyЭ H_n$ , если разбиение выполнено оптимально, гарантирует в общем “достаточную” или, точнее, соответствующую критерию – “оптимальную” точность расчета и не позволяет получать результаты в промежуточных точках  $SyЭ$ .

Существенное повышение точности расчета, идентификация любого количества промежуточных данных, а также обеспечение работы с криволинейными элементами, решается внутренним (в пределах каждого  $SyЭ$ ) рекуррентным процессом на основе матриц  $H_k^*$ . Эта часть в общем процессе занимает весьма ответственное значение. От точности определения элементов матрицы  $H_k^*$  главным образом и зависит точность решения задачи в целом. Рассмотрим алгоритм построения матриц  $H_k^*$  и выход на их основе к формированию матриц  $H_n$   $p$ -го  $SyЭ$ .

Представим, что  $[s = 0, s = L]$  есть начало и конец некоторого  $SyЭ$  оболочки, выбранного оптимальным образом. Разделим интервал  $[0, L]$  на  $N_0 \gg 1$ , в общем, криволинейных отрезков (то есть, назовем  $s_j = L/N_0$ ) и построим рекуррентный процесс в пределах этого  $SyЭ$ , в соответствии с формулами (2.4) для  $j = 1, 2, \dots, N_0$ :  $\bar{z}_1 = H_1^* \bar{z}_0$ ;  $\bar{z}_2 = H_2^* \bar{z}_1$ ; ...;  $\bar{z}_{N_0-1} = H_{N_0-1}^* \bar{z}_{N_0-2}$ ;  $\bar{z}_{N_0} = H_{N_0}^* \bar{z}_{N_0-1}$ . Эту цепочку можно представить в виде некоторого рекуррентного выражения:

$$\bar{z}_N = [H_{N_0}^* \cdot H_{N_0-1}^* \dots H_2^* \cdot H_1^*] \bar{z}_0 = H_N \bar{z}_0. \quad (2.5)$$

Последнее соотношение и представляет собой алгоритм построения матрицы  $H_N$  на выделенном  $N$ -м  $SyЭ$ . При этом если параметр  $s$  мал, то все промежуточные матрицы  $H_j^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_0$  будут иметь низкий порядок нормы и вычислены точно. Произведение этих матриц в формуле (2.5), то есть, каждой из матриц  $H_N$  в разрешающей системе, будет иметь тоже высокую точность. Сделаем несколько замечаний.

– Количество дискретных элементов в пределах  $SyЭ$  (то есть число  $N_0$ ) может быть достаточно большим. При условии, что деление на  $SyЭ$  выбрано оптимальным образом, увеличение  $N_0$  заметно повышает точность расчета в целом и матриц  $H_N$  в частности. Это позволяет расчетный (оптимальный) коэффициент деления на  $SyЭ$  несколько уменьшить, понижая тем самым разрешающую способность разрешающей системы.

– Не менее важная роль внутреннего (в пределах  $SyЭ$ ) рекуррентного процесса (2.5) состоит в возможности выдачи расчетных данных в любом числе точек и с любым мелким шагом дискретизации. Внутренний рекуррентный процесс не связан и не зависит от разбиения на  $SyЭ$ , поэтому порядок разрешающей системы тоже не зависит от числа  $N_0$  на каждом  $SyЭ$  и суммарного его значения по всей конструкции. Это позволяет в процессе решения задачи, без перестройки алгоритма и программы, менять  $N_0$  на любом из  $SyЭ$  с целью, например, уточнения отдельных участков формы получаемой кривой и т. п.

– Частное решение неоднородной задачи строится таким же рекуррентным путем и в том же блоке, что и для однородной системы в виде вектора-

столбца, который записывается, как указано выше, в девятый столбец матрицы  $H_j^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_0$  и трансформируется, в соответствии с формулой (2.5), в матрицу  $H_N$  соответствующего СуЭ.

**2.6. Учет местных особенностей.** Изменение ориентации базиса (что эквивалентно пересчету компонент вектора состояния) при переходе к очередному конструктивному элементу выполняется автоматически с помощью “матрицы поворота”. По умолчанию эта матрица является единичной, а в соответствующем месте параметры ее формируются по заданным исходным данным задачи. Местные нагрузки и другие особенности местного характера, отмеченные выше, отражаются так называемой “матрицей включений”, которая тоже “по умолчанию” является единичной и заполняется в соответствующем месте автоматически по заданным исходным данным.

Ниже будут рассмотрены три относительно простых примера. Иллюстрирующих использование описанного выше алгоритма и разработанной на его основе программы.

**3. Длинная цилиндрическая оболочка.** В качестве первого тестового примера рассматривается задача статики длинной цилиндрической оболочки с жестко закрепленными концами и постоянным внутренним давлением. Пример выбран как иллюстрация возможностей МРС в связи с общеизвестностью качественных результатов такой задачи и известными особенностями построения ее решения различными методами. Решение получено «as is», то есть, без использования симметрии по границам и осевой симметрии, равномерности распределения нагрузки, без комбинации и наложения (как это иногда практикуется) краевого эффекта и безмоментного состояния. На рис. 1 приведены данные расчета параметров перемещения оболочки ( $L = 9$  м;  $K = 0,8$  м;  $h = 5$  мм; модуль Юнга –  $2 \cdot 10^6$  кГс/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона – 0,3). Оболочка нагружена внутренним давлением –  $q_3 = 0,1$  кГс/см<sup>2</sup>, концы жестко соединены с абсолютно жесткими днищами.

Графики построены программой **CurvExprt 1.38** непосредственно по расчетным точкам без какой-либо корректировки. О точности расчета можно судить по поведению кривых в зоне участка безмоментного НДС ( $\approx [30 \div 870]$  см по образующей), симметрии и, как нам кажется, идеальному соответствию формы всплесков на участках краевых эффектов. Эти участки слева и справа отмечены вертикальными прямыми. Кстати, следует заметить, что в зоне краевых эффектов решения не имеют вида затухающего периодического процесса, как это часто изображается в литературе. Симметричные (соответственно, антисимметричные) значения параметров вектора состояния в зоне краевых эффектов совпадают до последней цифры после запятой.

В соответствии с видом заданной нагрузки, касательное к параллели перемещение  $v \equiv 0$  и соответствующее ему крутящее усилие  $S_1 \equiv 0$  (не априори, а по расчету). Растягивающее (по образующей усилие) постоянно по всей

длине и равно  $T_1 = 2,376 \text{ кГс/см}$  и постоянно по всей длине. Радиальное перемещение, как видим, постоянно в зоне безмоментного состояния и равно  $w = 5,83 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$ . Максимальный пик его достигается слева и справа в зоне краевого эффекта, где  $w_{\max} = 6,08 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$ . Поскольку концы этой длинной оболочки закреплены, то осевое перемещение идет уменьшаясь слева направо до середины (450 см), а затем в обратную сторону возрастая и достигая пиков ( $u_{\max} = 1,119 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ ) в зонах краевых эффектов.

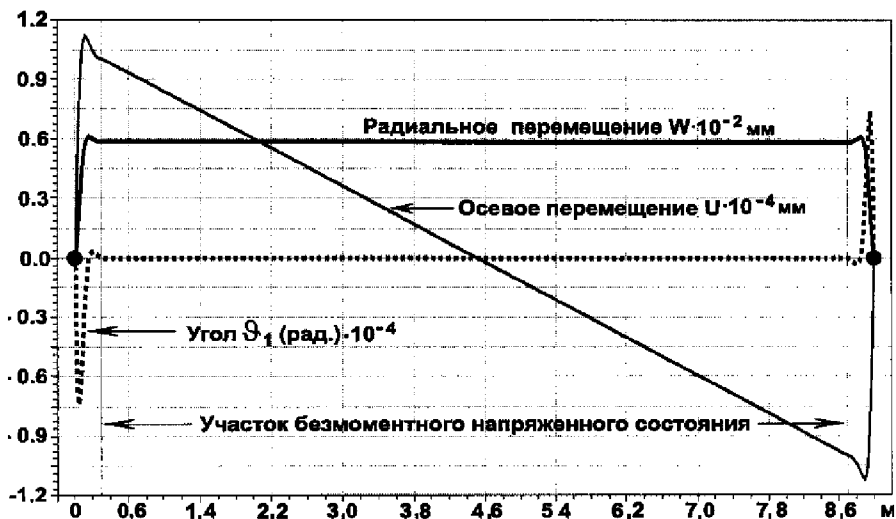


Рисунок 1 – Распределение перемещений и углов поворота при деформации оболочки.

На внешней поверхности оболочки максимальные напряжения (растягивающие) достигаются на границах и равны:  $+31,215 \text{ кГс/см}^2$ . На внутренней поверхности напряжения сжимающие, достигаются тоже в граничных точках и равны:  $-21,710 \text{ кГс/см}^2$ . На участке безмоментного состояния, напряжения обусловлены только постоянным растягивающим усилием и имеет значение:  $4,752 \text{ кГс/см}^2$ . Оболочка разбита на 15 СуЭ по 60 см каждый. Для адекватного отражения форм кривых в областях краевого эффекта, СуЭ первый и пятнадцатый разбиты на  $N_0 = 40$  дискретных элементов по 1,5 см, для каждого из остальных, то есть, работающих в зоне безмоментного НДС, назначено по  $N_0 = 5$  элементов. “Оптимальное” расчетное разбиение на СуЭ для получения надежного решения (без учета дополнительного разбиения СуЭ на  $N_0 \neq 1$ ), дает цифру – 22 (по 40,9). При таком раскладе мы потеряли бы информацию о краевом эффекте (нет там промежуточных точек вывода) при, в целом, адекватном решении. Как отмечалось выше, при  $N_0 \gg 1$  оказалось возможным работать с более крупными СуЭ и уменьшить порядок разрешающей системы (в нашем случае он был равен –  $116 \times 117$ , а при 22 СуЭ был бы –  $172 \times 173$ ). Общее количество дискретных элементов – 136. Сомнительно, чтобы такое число узлов ортогонализации обеспечило



соответствующие по точности результаты.

Интересно отметить и данные по аппроксимации степенным рядом формирования матриц  $H_n$  и данные по оценке решения в целом. Такие данные приведены в таблице 1. Судя по остаточному члену аппроксимации, степенной ряд использован в соответствии с требованиями заданного предела погрешности ( $Eps = 10^{-22}$ ). Рекуррентный процесс аппроксимации решения, то есть добавление очередных членов ряда, автоматически продолжается до тех пор, пока максимальный остаточный член ряда в решении по всем компонентам вектора состояния не станет меньше  $Eps$ .

Таблица 1 – Оценки аппроксимации решения степенным рядом

Длина в см. элемента образующей	Необходимая степень полинома	Максимальный элемент матрицы $H_n$	Верных знаков в мантиссе решения	Порядок остаточного члена
150	156	$4.5 \cdot 10^{18}$	1	$1.3 \cdot 10^{-21}$
100	116	$1.1 \cdot 10^{14}$	8	$4.6 \cdot 10^{-22}$
80	100	$7.0 \cdot 10^{11}$	9	$1.6 \cdot 10^{-22}$
60	84	$4.8 \cdot 10^{10}$	11	$2.3 \cdot 10^{-22}$
12	36	$3.0 \cdot 10^6$	22	$6.1 \cdot 10^{-23}$
1,5	20	$1.9 \cdot 10^4$	25	$2.0 \cdot 10^{-26}$

Тем не менее, даже при достаточно малом отрезке аппроксимации ( $s = 1,5$  см) потребовалось 20 членов ряда для получения точного решения. Число верных знаков ниже цифры 11 указано условно. Компьютер в режиме вещественного типа **extended** отражает на экране только 14 знаков мантиссы. Остаточный член ограничен заданным  $Eps$ . Следовательно, если фактический остаточный член стал меньше чем  $Eps$ , то верных знаков в решении должно быть, по крайней мере, на единицу меньше чем порядок остаточного члена. В данном примере, при длине отрезка аппроксимации  $s = 1,5$  см, следует считать, что решение системы уравнений получено с точностью не ниже чем  $10^{-25}$ . Это практически точное решение. В рассматриваемом примере оценка погрешности и количество верных знаков фактического решения выполнялась сравнением расчетных параметров ( $M_1$ ,  $Q_1$ ,  $\vartheta_1$ ) по левой и правой границе (где, в идеале, они должны быть тождественно равны) по параметру с максимальным расхождением.

Табл. 1 иллюстрирует, с одной стороны, формальную сходимость процесса аппроксимации независимо от длины, с другой – аргументирует необходимость и возможность выбора оптимального деления на  $Su\bar{E}$  и, наконец, демонстрирует возможность реализации численного процесса построения решения в целом. Естественно, полученные на конкретном примере оценки, выводы и комментарии, не являются неким общим и абсолютным критерием. Но, как нам кажется, они дают некоторое представление о характере и возможностях метода в целом.

#### 4. Сосуд высокого давления. Исследования этой задачи выполнены в

двух обширных работах [12,13]. Целью исследований, была теоретическая (расчетная) и экспериментальная оценка максимальных напряжений, прежде всего, в возможных точках их концентрации. Сосуд (рис. 2) предназначен для работы в конструкциях атомной энергетики, при повышенных требованиях по запасу прочности и надежности. Как сообщают авторы этих работ, по английским стандартам, для конструкций подобного назначения установлен коэффициент концентрации  $k = 2,25$  от основного расчетного напряжения, в качестве которого принимается так называемое “мембранное” (то есть полученное в безмоментной зоне) напряжение. Приблизительно оно (в наших обозначениях) считается равным  $\sigma_m = Rq_3/h/2$  и должно составлять для малоуглеродистой стали  $2\sigma_t/3$ , где  $\sigma_t$  – предел текучести при простом растяжении. При расчетном напряжении  $\sigma_t = 15,4 \text{ кН/см}^2$ , предельное, соответствующее нормам стандарта, напряжение не должно превышать  $\sigma_0 = 2,25 \cdot 15,4 = 34,6 \text{ кН/см}^2$ . Для снижения ожидавших высоких напряжений в зоне стыковки патрубков с основной сферической оболочкой предложено использовать специальные кольцевые накладки. Численные расчеты [13] выполнены на основе разбиения конструкции на отдельные узловые элементы, с формулировкой дополнительных уравнений стыковки и совместимости, включенных в единую общую систему алгебраических и дифференциальных уравнений.

Результаты безмоментного состояния и краевых эффектов получены отдельно и затем скомбинированы. При численном расчете [13] учтен только один (меньшего диаметра) патрубок. Расчет патрубка выполнен в постановке полубесконечной цилиндрической оболочки. Как в численном расчете работы [13], так и в экспериментальных исследованиях [12] изучены два альтернативных варианта накладок.

В первом варианте накладки тракуются как утолщения основной (сферической) части конструкции соответствующих размеров и толщины. Этот вариант использовался и в наших расчетах. По результатам расчетов в этом варианте авторы работы [13, стр. 70] делают следующие выводы. Максимальное напряжение в сферической части сосуда  $\sigma_s = 22,0 \text{ кН/см}^2$  наблюдается на внутренней поверхности вблизи соединения с накладкой. В патрубке напряжения существенно выше.

Максимальные напряжения наблюдаются тоже в зоне стыковки патрубка с накладкой. Максимальные меридиональные напряжения на наружной поверх-

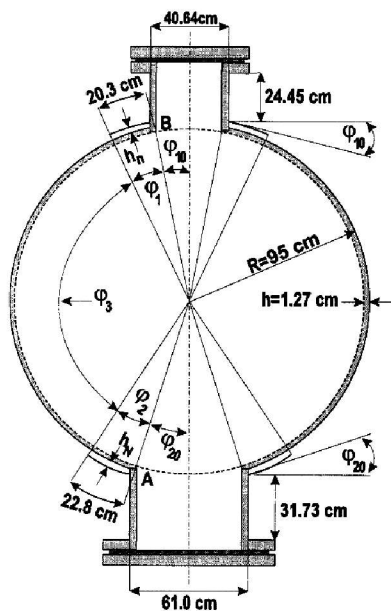


Рисунок 2 – Расчетная схема сосуда.

ности  $\sigma_{pn} = 44,5 \text{ кН/см}^2$ , на внутренней  $\sigma_{pv} = 52,0 \text{ кН/см}^2$  и уже далеко выходят за рамки предельных.

В работе [13] исследовался и другой вариант использования накладки (накладка приварена к контуру) с теми же размерами. В этом случае результаты расчета оказались тоже значительно выше предельных и несколько хуже прежнего варианта. В местах соединения патрубка с оболочкой максимальные напряжения составляют: на наружной поверхности –  $\sigma_{pn} = 50,0 \text{ кН/см}^2$ ; на внутренней –  $\sigma_{pv} = 63,0 \text{ кН/см}^2$ , что почти в два раза превышает предельное. Как отмечают авторы работы [13] в своем заключении «...максимальные напряжения возникают в накладке у пересечения ее с патрубком. Эти напряжения существенно превосходят предел, установленный стандартом, –  $34,6 \text{ кН/см}^2$ ».

Остановимся более подробно на результатах и выводах экспериментальных исследований в работе [12], прежде всего, в связи с тем, что эти результаты далеко не полностью подтверждают выводы численных расчетов (в том числе и цитировавшиеся выше) и, во-вторых, дают более полную раскладку напряженного состояния конструкции. Экспериментальные исследования выполнены тщательно и заслуживают доверия по двум причинам. С одной стороны, в их организации и проведении участвовали несколько заинтересованных в надежных результатах организаций (два отдела Научно-технического института Манчестерского университета; Совет по научным исследованиям; Комитет стандартов по производству сосудов давления Британского института стандартов). Кроме этого, объективные выводы и, во многом, отрицательные оценки расчетных результатов, сделаны коллективом исследователей большинство из которых принимали участие в экспериментальных и теоретических исследованиях.

Экспериментальные исследования выполнены на реальных объектах с заглушенными патрубками, то есть, в постановке близкой к принятой в наших расчетах. Коротко, выводы по экспериментальным результатам, сводятся к следующему. Имеется много расхождений между расчетными и экспериментальными результатами. Причина этих расхождений, по мнению авторов, в невозможности теоретически учесть гибкость сварных швов, повышения жесткости конструкции на стыке патрубка с корпусом и в соединении корпуса с наружным краем накладки. Расчет не учитывает влияния возможных зазоров между накладкой и корпусом.

**4.1. Расчет сосуда MPC.** Методом рекуррентных соотношений выполнен расчет НДС сосуда (рис. 2) при внутреннем давлении  $q_3 = 0,4261 \text{ кН/см}^2$ . Сосуд представляет собой сферу внешним диаметром 190 см (диаметр средней поверхности – 83,65 см) и толщиной стенки – 1,27 см. К сфере подсоединены (сплошным сварным швом) два цилиндрических патрубка. Один из них, с внешним диаметром 40,64 см и толщиной стенки 1,27 см. Для уменьшения коэффициента концентрации напряжений в местах соединения патрубков со сферой используются специальные утолщения сферы в качестве, так называемых, накладок. Накладки имеют толщину:  $h_N = 1,27 \text{ см}$  и  $h_n = 0,95 \text{ см}$  соответственно. Некоторые дополнительные размеры показаны на

рис. 2. Углы (в радианах), показанные на рис. 2 и используемые в расчете, имеют значения:  $\varphi_{10} = 0,326840684$ ;  $\varphi_1 = 0,213684211$ ;  $\varphi_{20} = 0,215559999$ ;  $\varphi_3 = 2,145507769$ ;  $\varphi_2 = 0,24$ . Конструкция разбита на 15 СуЭ. Каждый из патрубков разбит на 2 СуЭ по  $N_0 = 25$  дискретных элементов (ДЭ). Каждая накладка – в качестве одного СуЭ, где  $N_0 = 35$ . Цифры по количеству ДЭ заданы с запасом для максимально адекватного отражения формы кривых. Сферическая часть разбита на 9 СуЭ, каждый из которых имеет по 15 ДЭ. Всего дискретных элементов – 305. Разрешающая система имеет размерность  $116 \times 117$ . Все исходные данные соответствуют работе [12].

На графиках рис. 3 показаны: сплошной линией меридиональные напряжения на внешней поверхности последовательно по всем элементам конструкции; пунктирной линией – напряжения на внутренней поверхности; точечным пунктиром, в том же масштабе, – распределение изгибающих моментов. В результате расчетов (см. рис. 3) максимальные напряжения по всей конструкции не превышают  $27,79 \text{ кН/см}^2$  и достигаются на внутренней поверхности первого (большого диаметра) патрубка. На внешней поверхности того же патрубка и в той же точке максимальное напряжение равно  $23,02 \text{ кН/см}^2$ . Среднее напряжение в этой точке равно  $25,405 \text{ кН/см}^2$ . По экспериментальным данным работы [12] (см. стр. 90) максимальное напряжение определено в размере  $25,51 \text{ кН/см}^2$  на том же патрубке (поверхность не указана), что почти полностью совпадает с нашим средним расчетным. Как отмечают сами экспериментаторы (стр. 91): «Всплески напряжений и высокие меридиональные изгибающие моменты вблизи места сварки с патрубком, предсказываемые теорией [13], фактически не наблюдались». И далее: «В области около наружного сварного шва (между накладкой и основной оболочкой) наблюдается наибольшее расхождение экспериментальных и теоретических результатов». В области патрубка большого диаметра, накладки и ее соединения со сферической частью конструкции максимальные напряжения по данным эксперимента не превышают  $25,51 \text{ кН/см}^2$  и реализуются на внутренней поверхности оболочки.

В наших расчетах, в указанных сечениях всплески напряжений имеются, но они заметно ниже максимальных (см. рис. 3) и, естественно, не достигают таких величин (порядка  $\pm 49,64 \text{ кН/см}^2$ ) как дают численные расчеты работы [13]. Максимальные напряжения в этой части конструкции по нашим расчетам достигаются тоже на внутренней поверхности и равны  $27,79 \text{ кН/см}^2$ . В области стыка накладки со сферической частью всплеск напряжения (опять же на внутренней поверхности) равен  $16,69 \text{ кН/см}^2$ , что тоже значительно ниже предельного.

По второму патрубку (меньшего диаметра) картина распределения напряжений и изгибающих моментов в общем соответствует рассмотренной выше. Экспериментальные результаты заметно отличаются (существенно ниже) от расчетных работы [13]. Если численный расчет дает здесь максимальное значение порядка  $51,71 \text{ кН/см}^2$ , то полученное экспериментально не превышает  $24,82 \text{ кН/см}^2$ , то есть, практически то же, что и на патрубке большого диаметра. Полученные нами в расчетах максимальные напряжения на этом участ-

ке заметно ниже и не превышают  $12,77 \text{ кН/см}^2$ . Снижение максимальных напряжений на малом патрубке (по сравнению с патрубком большего диаметра) кажется естественным, а его отличие от экспериментального пока не нашло пока объяснения у автора. Полученные экспериментально напряжения в безмоментной зоне  $15,16 \text{ кН/см}^2$  (авторы работы [12] называют их «мембранными») практически совпадают с полученными нами расчетными  $14,85 \text{ кН/см}^2$ . Максимальные расчетные [13], экспериментальные по работе [12] и расчетные по МРС напряжения сведены в таблицу 2. Полученное МРС в общем расчете, так называемое мембранное напряжение в сферической части оболочки,  $14,85 \text{ кН/см}^2$  весьма близко к экспериментальному  $15,16 \text{ кН/см}^2$ , а оба этих значения отличаются от теоретического результата работы [13], равного  $22,00 \text{ кН/см}^2$ .

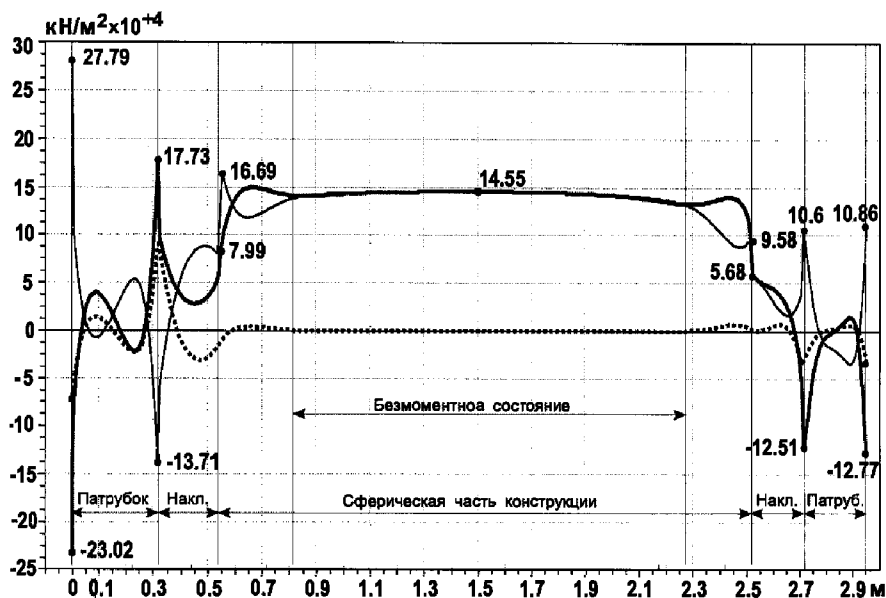


Рисунок 3 – Распределение напряжений и меридиональных моментов.

В наших расчетах в зоне стыковки сферы с накладкой (малый патрубок) напряжение на внутренней поверхности равно  $\sigma_s = 9,58 \text{ кН/см}^2$ . В соответствующей зоне большого патрубка  $\sigma_s = 16,69 \text{ кН/см}^2$  и достигается тоже на внутренней поверхности оболочки. Что касается зон стыковки патрубков с оболочкой, то в наших расчетах для малого патрубка напряжения на внутренней поверхности  $\sigma_{pv} = 10,60 \text{ кН/см}^2$  и, соответственно, на внешней поверхности  $\sigma_{pn} = 12,51 \text{ кН/см}^2$ . В аналогичном месте стыковки большого патрубка с утолщенной оболочкой, на внутренней поверхности  $\sigma_{pv} = 13,71 \text{ кН/см}^2$  и, соответственно, на внешней —  $\sigma_{pn} = 17,73 \text{ кН/см}^2$ . Таким образом, наши расчетные результаты оказываются ниже предельных по всем характерным точкам конструкции и достаточно хорошо со-

гласуются с экспериментальными исследованиями работы [12].

Существенное расхождение между расчетными и экспериментальными результатами работ [12,13], кроме указанных выше авторами причин. По нашему мнению, объясняется в первую очередь и не достаточно адекватным численным методом расчета.

Таблица 2 – Максимальные напряжения (расчет [13], эксперимент [12], по МРС)

Объект	Расчет, эксперим. МРС	Наружная поверхность кН/см <sup>2</sup>	Внутренняя поверхность кН/см <sup>2</sup>	Комментарии
Патрубок А	Расчет, Экспер. МРС	-49,64 <b>25,51</b> -23,02	+49,64 – +27,79	Знак <<–>> означает сжатие Поверхность не указана Среднее значение 25.40
Патрубок В	Расчет, Экспер. МРС	-51,71 <b>24,82</b> -12,77	– – +10,86	Указано только это Поверхность не указана Среднее значение 11.815
Сфера	Расчет, Экспер. МРС	– – <b>15,16</b> +14,85	+22,00 – – +14,85	Указано только это “Мембранное напряжение” Безмоментное напряжение

**5. Колебания составных цилиндрических оболочек.** Следующий пример использования МРС касается расчета свободных и вынужденных колебаний составной оболочечной конструкции (см. рис. 4). Оболочки соединены между собой фланцами. Граничные условия представляют собой жесткую заделку.

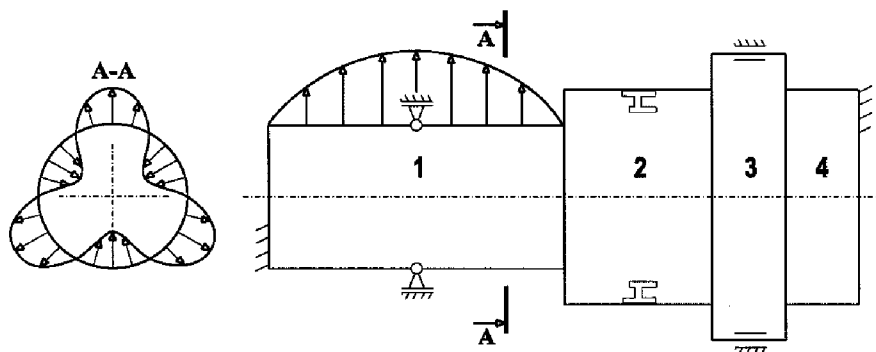


Рисунок 4 – Общий вид и форма нагрузки составной конструкции.

Параметры оболочек конструкции имеют следующие данные:

1.  $L_1 = 1,6$  м;  $R_1 = 0,4$  м;  $h_1 = 0,001$  м;  $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu_1 = 0,3$ ; кольцевая опора запрещает только радиальные перемещения и расположена по центру образующей оболочки.

2.  $L_2 = 0,8$  м;  $R_2 = 0,6$  м;  $h_2 = 0,0015$  м;  $E_2 = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu_2 = 0,3$ ; шпан-

гоут находится по центру образующей оболочки, площадь шпангоута  $10^{-4} \text{ м}^2$ . Его влияние отражается в данном случае в виде дополнительной кольцевой упругой связи.

3.  $L_3 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_3 = 0,8 \text{ м}$ ;  $h_3 = 0,001 \text{ м}$ ;  $E_3 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $\nu_3 = 0,3$ ; опора находится по центру образующей оболочки и запрещает повороты  $\vartheta_1$  и радиальные перемещения.

4.  $L_1 = 0,4 \text{ м}$ ;  $R_1 = 0,6 \text{ м}$ ;  $h_1 = 0,001 \text{ м}$ ;  $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $\nu_1 = 0,3$ .

Радиальная динамическая нагрузка приложена только к оболочке №1 и распределена по образующей по параболическому закону вида:

$$q(x, \varphi, t) = \frac{4P_1(L_1 - x)x}{L_1^2} \cdot \cos(p\varphi) \sin(\omega t), \quad (5.1)$$

где амплитудное значение этой нагрузки  $P_1 = 10^5 \text{ Па}$ , а форма ее в окружном направлении определяется числом  $p$ . При  $p = 3$  ее вид показан на левой части рис. 4. Методом рекуррентных соотношений выполнен расчет свободных и вынужденных колебаний этой конструкции.

На рис. 5 приведены результаты расчета первых шести частот и форм свободных колебаний по образующей для числа полуволн нагрузки  $p = 3$ . Формы колебаний строились по компоненте радиального перемещения  $w$  собственного комплексного вектора, соответствующего заданному собственному значению  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , где (в этой задаче)  $\alpha \equiv 0$ , а  $\beta$  представляет собой круговую частоту колебаний.

Как видно из приведенного рисунка, в данном случае (впрочем, как и в других случаях, когда форма колебаний не описывается простой периодической функцией), трудно говорить о «первой» или «второй» формах, так как каких-либо определенных отличительных признаков у различных форм колебаний нет. Конечно можно называть первой частотой – минимальную и далее – по возрастанию, но все равно определение «первая форма» не будет являться информативным. Вероятно целесообразно говорить о конкретном значении частоты свободных колебаний вместе с визуальным представлением соответствующей ей формы.

**5.1. Сравнение двух видов колебаний.** Распределение частотного спектра (до  $1000 \text{ Гц}$ ) и форм свободных колебаний по меридиану для одной окружной формы ( $p = 3$ ) приведены на рис. 5. На этом рисунке амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний составной конструкции и соответствующие им формы для  $p = 3$  сопоставлены с расчетом свободных колебаний. Графики форм вынужденных колебаний строились по расчетным радиальным перемещениям  $w$  в пределах всех составных элементов конструкции. Вполне обоснованно ожидать появления резонанса на частотах, совпадающих с частотой свободных колебаний. Но для этого необходимо, чтобы форма деформации оболочек для вынужденных и свободных колебаний совпадали. Это означает, в частности, что при несимметричной деформации оболочки в продольном сечении (относительно центрального сечения) резонанса быть не должно, так как симметричная форма нагрузки не должна видимо вы-

зывать несимметричную деформацию. Практически, судя по графикам, эта ситуация и наблюдается. Пунктирной линией обозначены частоты свободных колебаний симметричной формы в продольном сечении, а штрихпунктирной – несимметричной форма. Первые практически совпадают с полученными резонансами как по значению частоты, так и по форме колебаний.

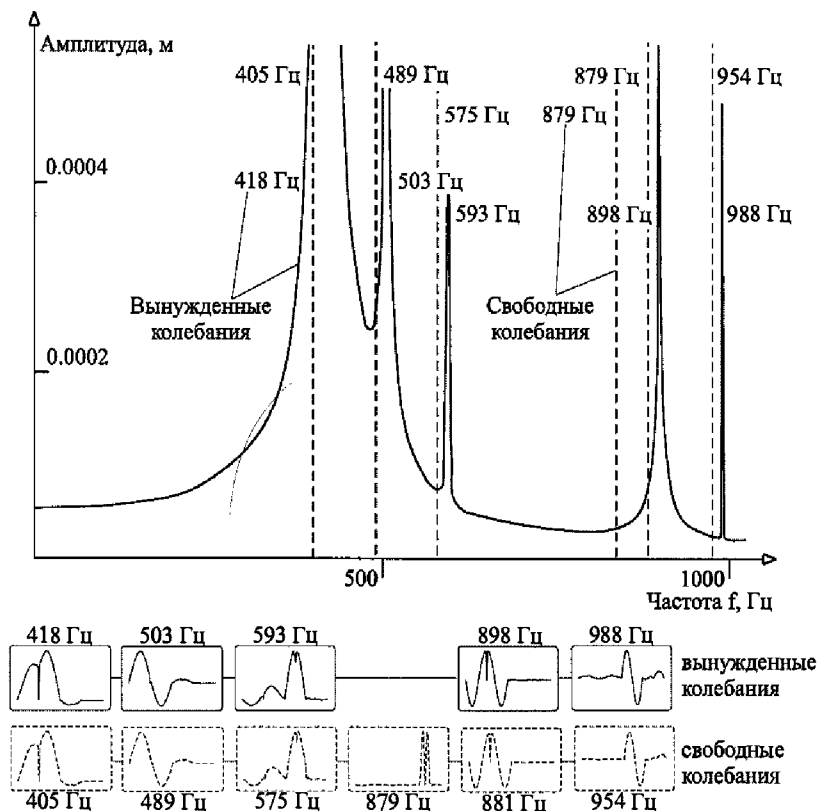


Рис. 5. Сравнение собственных и вынужденных колебаний составной конструкции.

Формы колебаний, полученные двумя разными путями, качественно идентичны. Некоторое отличие вызвано тем, что сравнение вынужденных колебаний проводится не с собственными колебаниями, учитывающие предварительное НДС в невозмущенном состоянии (которое, безусловно, повлияет на частотный спектр), а со свободными колебаниями конструкции. На одной из частот свободных колебаний (879 Гц) не было получено резонанса в режиме вынужденных. Вероятно, это объясняется тем обстоятельством, что форма колебаний на этой частоте такова, что основные колебания происходят в наибольшем удалении от возбуждающей нагрузки. Как следствие – зона резонан-



са должна быть достаточно узкой. И поскольку шаг изменения частоты нагрузки был конечным, существует вероятность, что была пропущена соответствующая резонансная частота. Для ее обнаружения достаточно уменьшить шаг изменения частоты при построении амплитудно-частотной характеристики. Как видно, кроме ярко выраженных резонансов существует некоторое число меньших по масштабу всплесков амплитуды. Кроме того, теперь заметны и некоторые другие особенности, такие как большие значения амплитуд для некоторых форм колебаний на низких частотах. Возможно, при исследовании вынужденных колебаний приходится фиксировать модуляционные и комбинированные всплески с малыми амплитудами.

Ширина резонансных зон различия, так же как и относительные значения амплитуд колебаний. В рассмотренном диапазоне частот (от 1 Гц до 1кГц) наиболее ярко выраженный резонанс наблюдается при частоте нагрузки 418 Гц (первый резонанс). При росте частоты нагрузки амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

**Выводы.** Предлагаемый подход к исследованию статического и динамического состояния комбинированных оболочечных систем, состоящих из оболочек вращения и других конструктивных элементов, мы называем «методом рекуррентных соотношений» (МРС), поскольку в основе всех взаимодействующих алгоритмов законченного численного процесса лежит именно рекуррентный процесс построения адекватного решения. Некоторые подробности использования МРС в расчетах различных конструкций приведены в работах автора и его сотрудников, например, [6,7,8,9]. Отметим некоторые особенности и, по нашему мнению, положительные качества МРС:

1. Отсутствие использования приближенных численных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений, которые априори вносят более или менее существенные погрешности. В нашем случае, интегрирование, естественно, тоже выполняется (на этапе формирования матрицы  $H_j^*$ ) бесконечным степенным рядом на коротком отрезке  $s$  образующей. Процесс этот реализуется с автоматической оценкой достижения формально любой точности. В наших примерах мы ограничились  $Eps = 1e-22$ , исходя из возможностей вещественного типа данных **extended**. Это гарантировало получение практически точного решения уравнений на каждом СуЭ и по всей конструкции в целом.

2. Исключено, за ненадобностью, использование метода ортогонализации по С.К. Годунову со всеми его атрибутами, с формированием и удерживанием в памяти матриц ортогонализации, вычислением и использованием обратных матриц и т.п. Другими словами, исключен еще один источник накопления погрешностей.

3. Появилась возможность построения полей напряжений, перемещений и т. п. с любым при необходимости мелким шагом. Эта возможность не требует каких-либо перестроек алгоритма и программы.

4. Поскольку основные операции по формированию промежуточных

матриц для дискретных элементов  $H_k^*$ , соответствующих матриц для СуЭ  $H_N$  и разрешающей системы выполняется в режиме счета степенных рядов, то MPC обладает весьма высокой скоростью и надежностью.

5. Цикличность и компактность алгоритмов позволяет ограничиться достаточно малыми ресурсами, а предпроцессорная подготовка сводится к аккумулятивному заданию и раскладке исходных данных. Программы реализованы в среде DELPHI 6 только по причине известных ограничений на размерности массивов DOS Pascal. Для решения разрешающей системы используется стандартный вариант метода Гаусса.

6. Расчет собственных значений и форм в задачах малых колебаний и устойчивости выполняется специальной программой [6, 7, 11], работающей в комплексной области с режимами выделения и уточнения комплексных собственных значений. Эти режимы обеспечивают расчет формально любого числа комплексных корней с одинаковой и высокой точностью, как вещественных, так и мнимых их частей.

7. Предлагаемый подход, естественно, может быть использован для исследования других краевых задач, позволяющих приведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Список литературы:** 1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук. – 1961. – Т. XVI, вып.3. – С. 171-174. 2. Григоренко ЯМ. и др. О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении. // Применение ЭЦВМ в строительной механике. – Киев “Наукова думка”, 1968. – С. 46-51. 3. Кармишин А.В. и др. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М., 1981. – 216с. 4. Мясников В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. – М., 1981. – 216с. 5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М., 1977. – 488 с. 6. Доценко П.Д. Комплекс программ анализа статики и динамики трубопроводных систем с жидкостью. // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. – Х.: 1984. – Вып. 4. – С 3-22. 7. Доценко П.Д., Чернокуб И.П., Попов А.Е., Динамика трубопроводных систем. – Х., 1998. – 226 с. 8. Берешко И.Н., Вамболь С.А., Постановка задач расчета статики и динамики многосвязных цилиндрических оболочек методом рекуррентных соотношений // Тем. сборник науч. трудов НАУ «ХАИ». 2000: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Вып. 23(6). – С 144-155. 9. Доценко П.Д., Вамболь С.А., Мишин Д.С. Численный анализ частотного спектра, демпфирующих свойств и несущей способности некоторых цилиндрических оболочек. // Открытые информационные и компьютерные технологии. ХАИ. 1998. – Вып. 1. – С 414-419. 10. Чернина В.С. статика тонкостенных оболочек вращения. – М., 1968. – 455 с. 11. Доценко П.Д., Берешко И.Н. Об алгоритмизации решения задачи на собственные значения. // Открытые информационные и компьютерные технологии. ХАИ. 1998. – Вып. 2. – С 165-169. 12. Гилл С. и др. Эксперименты на сферических сосудах высокого давления с подкрепляющими накладками у выходных отверстий. // Расчет напряженного состояния сосудов. № 24. Перевод с англ. – М.: «Мир», 1980. – С 73-106. 13. Китчинг Р. и др. Исследование напряженного состояния в сферическом сосуде высокого давления с подкрепляющей накладкой в окрестности радиального патрубка. // Расчет напряженного состояния сосудов. №24. Перевод с англ. – М.: «Мир», 1980. – С. 56-73.

Поступила в редакцию 15.03.04